

Rešenja zadataka (NP-težina, hiperkocka, domine)

1 NP-težina 4-oboživosti (redukcija iz 3-oboživosti)

Problem

Dato je neusmereni graf $G = (V, E)$. Odlučiti da li je G pravilno obojiv sa najviše k boja (tj. krajevi svake grane imaju različite boje). Dokazati da je **4-oboživost** NP-težak problem svodjenjem **3-oboživosti** na njega.

Redukcija

Neka je ulazna instanca za 3-oboživost graf $G = (V, E)$. Konstružemo graf $G' = (V', E')$ ovako:

- Dodamo četiri nova čvora a, b, c, d i povežemo ih u kompletan graf K_4 , tj. dodamo sve grane između svakog para iz $\{a, b, c, d\}$.
- Za svaki originalni čvor $v \in V$ dodamo granu (v, d) (povežemo svaki originalni čvor sa čvorom d iz dodatka).

Dakle $V' = V \cup \{a, b, c, d\}$, a $E' = E \cup E(K_4) \cup \{(v, d) \mid v \in V\}$. Konstrukcija je očigledno polinomijalna u $|V| + |E|$.

Korektnost

Lema 1. *U svakom pravilnom 4-bojenju grafa K_4 svi čvorovi K_4 moraju imati različite boje.*

Dokaz. U K_4 je svaki par čvorova spojen granom, pa nijedna dva čvora ne smeju imati istu boju. Dakle potrebne su četiri različite boje. $\square$

Teorema 1. G je 3-obojiv $\iff G'$ je 4-obojiv.

Dokaz. ($\Rightarrow$) Pretpostavimo da G ima pravilno 3-bojenje bojama $\{1, 2, 3\}$. Obojimo K_4 tako da a, b, c dobiju boje 1, 2, 3 (u nekom poretku), a d dobije boju 4. Pošto je svaki originalni čvor v povezan sa d , v ne sme imati boju 4, ali već ima jednu od $\{1, 2, 3\}$, pa su sve grane i u E i prema d ispravne. Dakle dobijamo pravilno 4-bojenje G' .

($\Leftarrow$) Pretpostavimo da G' ima pravilno 4-bojenje. Po lemi, u podgrafu K_4 čvorovi a, b, c, d imaju četiri različite boje, pa d ima neku boju, recimo boju α . Svaki originalni čvor $v \in V$ je povezan sa d , pa ne sme imati boju α . Dakle svi čvorovi iz V koriste samo preostale tri boje, i pošto su grane među njima iste kao u G , restrikcija bojenja na V je pravilno 3-bojenje grafa G . $\square$

Kako je 3-oboživost NP-težak problem, iz polinomne redukcije sledi da je i 4-oboživost NP-težak.

2 NP-težina 4SAT (redukcija iz 3SAT)

Problem

3SAT: data je CNF formula gde svaka klauza ima tačno 3 literala. Odlučiti da li je zadovoljiva. **4SAT**: isto, ali svaka klauza ima tačno 4 literala.

Dokazati da je 4SAT NP-težak redukcijom iz 3SAT.

Redukcija

Neka je data 3CNF formula

$$\Phi = \bigwedge_{i=1}^m (\ell_{i1} \vee \ell_{i2} \vee \ell_{i3}).$$

Za svaku klauzu $C_i = (\ell_{i1} \vee \ell_{i2} \vee \ell_{i3})$ uvedemo novu promenljivu y_i koja se ne pojavljuje nigde drugde i klauzu zamenimo sa dve 4-literalne klauze:

$$C'_i = (\ell_{i1} \vee \ell_{i2} \vee \ell_{i3} \vee y_i) \wedge (\ell_{i1} \vee \ell_{i2} \vee \ell_{i3} \vee \neg y_i).$$

Definišemo

$$\Phi' = \bigwedge_{i=1}^m C'_i.$$

Svaka klauza u Φ' ima tačno 4 literala, a konstrukcija je polinomijalna (udvostručava broj klauza i dodaje m novih promenljivih).

Korektnost

Teorema 2. Φ je zadovoljiva $\iff \Phi'$ je zadovoljiva.

Dokaz. ($\Rightarrow$) Neka dodela σ zadovoljava Φ . Tada u svakoj klauzi C_i bar jedan od literala $\ell_{i1}, \ell_{i2}, \ell_{i3}$ je istinit pod σ . Zato su obe klauze $(\ell_{i1} \vee \ell_{i2} \vee \ell_{i3} \vee y_i)$ i $(\ell_{i1} \vee \ell_{i2} \vee \ell_{i3} \vee \neg y_i)$ istinite bez obzira na vrednost y_i . Proširimo σ proizvoljno na sve y_i ; dobijamo dodelu koja zadovoljava Φ' .

($\Leftarrow$) Neka dodela σ' zadovoljava Φ' . Posmatrajmo bilo koje i . Ako bi sva tri literala $\ell_{i1}, \ell_{i2}, \ell_{i3}$ bila lažna, onda bi prva klauza zahtevala $y_i = \text{true}$, a druga klauza bi zahtevala $y_i = \text{false}$, što je nemoguće. Dakle, u svakoj originalnoj klauzi C_i bar jedan od tri literala mora biti istinit. Restrikcija σ' na originalne promenljive zadovoljava Φ . $\square$

Pošto je 3SAT NP-težak, a postoji polinomijalna redukcija $3SAT \leq_p 4SAT$, sledi da je 4SAT NP-težak.

3 Maksimum na hiperkocki

Imamo 2^n procesora povezanih u n -dimenzionu hiperkocku; svaki procesor poseduje jedan broj. Konstruisati paralelni algoritam vremenske složenosti $O(n)$ za nalaženje maksimuma.

(1) Definicija modela (adresiranje i susedstvo)

Procesore adresiramo binarnim rečima dužine n :

$$p \in \{0, 1\}^n.$$

Dva procesora p i q su *susedi* ako se njihove adrese razlikuju u tačno jednoj bit poziciji (Hamingtonova udaljenost 1). Za $i \in \{1, \dots, n\}$, sused procesora p po dimenziji i je procesor

$$p^{(i)} = p \oplus e_i,$$

gde je e_i vektor sa jedinicom na poziciji i i nulama drugde.

(2) Opis komunikacije (runde)

Izvršavanje ide u sinhronim rundama $t = 1, 2, \dots, n$. U rundi t svaki procesor p komunicira sa susedom po dimenziji t , tj. sa $p^{(t)}$. Oba procesora razmenjuju svoje trenutno najbolje vrednosti i zadržavaju maksimum.

Intuicija: ovo je paralelna *redukcija* preko dimenzija hiperkocke; nakon t rundi, maksimum je propagiran kroz podkocke dimenzije t .

(3) Pseudokod (ponašanje jednog procesora)

Neka je x_p inicijalna vrednost na procesoru p , a $best_p$ lokalna promenljiva.

```
best_p := x_p
for t = 1..n do
    partner := p XOR (1 << (t-1))    // menja se (t-1)-ti bit
    send best_p to partner
    receive best_partner from partner
    best_p := max(best_p, best_partner)
end for
// na kraju: best_p je globalni maksimum (na svim procesorima)
```

(4) Složenost

Ima tačno n rundi, a u svakoj rundi svaka ivica u dimenziji t nosi jednu poruku u oba smera (konstantan rad i komunikacija po procesoru). Dakle vremenska složenost je $O(n)$.

4 Šahovska tabla i domine

Posmatramo pravougaonu tablu $m \times n$ i domine dimenzija 2×1 .

(1) Modelovanje kao uparivanje u bipartitivnom grafu

Obojimo tablu kao šahovsku (crno-belo) tako da susedna polja (deljenje ivice) imaju različite boje. Napravimo bipartitivan graf $H = (B \cup W, F)$ gde:

- B je skup crnih polja, W skup belih polja,
- dodamo granu između $b \in B$ i $w \in W$ ako su ta polja ortogonalno susedna na tabli.

Domina 2×1 uvek pokriva tačno dva susedna polja različitih boja, tj. odgovara izboru jedne grane u H . Popločavanje cele table odgovara skupu domina bez preklapanja koji pokriva sva polja, tj. *savršenom uparivanju* u H (svaki čvor/polje je uparen tačno jednom).

(2) Za koje m i n popločavanje postoji?

Teorema 3. *Pravougaona tabla $m \times n$ se može popločati dominama 2×1 ako i samo ako je mn paran.*

Dokaz. (Nužno) Svaka domina pokriva tačno 2 polja, pa ukupan broj polja mn mora biti paran.

(Dovoljno) Ako je mn paran, bar jedan od brojeva m, n je paran. Ako je m paran, podelimo tablu na $m/2$ traka dimenzija $2 \times n$ i svaku traku popločimo sa n vertikalnih domina. Ako je n paran, analogno podelimo na trake dimenzija $m \times 2$ i popločimo horizontalnim dominama. U oba slučaja dobijamo popločavanje cele table. $\square$

(3) Slučaj $m = 2$: rekurencija za $T(2, n)$

Neka je $T(2, n)$ broj različitih popločavanja table $2 \times n$ dominama 2×1 .

Posmatrajmo krajnji levi stub (kolonu):

- Ako u prvi stub stavimo *jednu vertikalnu* dominu, preostaje tabla $2 \times (n - 1)$, pa doprinos je $T(2, n - 1)$.
- Ako u prvom i drugom stubu stavimo *dve horizontalne* domine (jednu gore, jednu dole), preostaje tabla $2 \times (n - 2)$, pa doprinos je $T(2, n - 2)$.

Ovo su jedine mogućnosti, pa važi rekurencija

$$T(2, n) = T(2, n - 1) + T(2, n - 2) \quad \text{za } n \geq 2,$$

sa bazama $T(2, 0) = 1$ (prazna tabla) i $T(2, 1) = 1$.

Dakle $T(2, n)$ je Fibonacijev niz (sa pomeranjem indeksa): $T(2, n) = F_{n+1}$ ako uzmemo $F_0 = 0, F_1 = 1$.